Factorización y resolución de ecuaciones cuadráticas

Guía de estudio y práctica | Tercer grado de secundaria

Profe. Jesús M. Real

Propósito: identificar patrones de factorización, aplicar la propiedad del producto cero y resolver ecuaciones cuadráticas por distintos procedimientos.

Antes de comenzar

Una expresión cuadrática tiene grado 2. Una ecuación cuadrática puede escribirse $ax^2 + bx + c = 0$, con $a \neq 0$. Factorizar es reescribir una expresión como producto de factores. Para resolver, primero se iguala a cero y se usa: si $A \cdot B = 0$, entonces $A = 0$ o $B = 0$.

Ejemplo: $x^2 - 5x + 6 = 0 \rightarrow (x - 2)(x - 3) = 0 \rightarrow x = 2$ o $x = 3$. Verifica sustituyendo ambos valores en la ecuación original.

1. Factor común

Se extrae el factor numérico y literal que aparece en todos los términos.

• Identifica el máximo factor común de los coeficientes.

• Extrae la menor potencia compartida de x.

• Escribe el producto e iguala cada factor a cero.

Ejemplo resuelto

$6x^2 + 12x = 0$

$6x(x + 2) = 0$

$6x = 0$ o $x + 2 = 0$; soluciones: $x = 0$ y $x = -2$.

20 ejercicios: factoriza y resuelve

01. $7x^2 + 14x = 0$

02. $2x^2 - 10x = 0$

03. $4x^2 + 28x = 0$

04. $5x^2 - 25x = 0$

05. $3x^2 - 18x = 0$

06. $2x^2 + 6x = 0$

07. $5x^2 + 10x = 0$

08. $2x^2 + 14x = 0$

09. $7x^2 + 56x = 0$

10. $9x^2 + 54x = 0$

11. $4x^2 - 16x = 0$

12. $4x^2 - 36x = 0$

13. $7x^2 + 21x = 0$
14. $2x^2 - 6x = 0$
15. $5x^2 - 35x = 0$
16. $7x^2 + 56x = 0$
17. $8x^2 - 16x = 0$
18. $3x^2 + 24x = 0$
19. $2x^2 - 12x = 0$
20. $4x^2 - 28x = 0$

2. Diferencia de cuadrados

Reconoce la resta de dos cuadrados perfectos: $A^2 - B^2 = (A - B)(A + B)$.

• Comprueba que haya dos términos separados por una resta.

• Calcula la raíz cuadrada de cada término.

• Forma dos binomios conjugados.

Ejemplo resuelto

$x^2 - 49 = 0$

$(x - 7)(x + 7) = 0$

Soluciones: $x = 7$ y $x = -7$.

20 ejercicios: factoriza y resuelve

01. $x^2 - 4 = 0$
02. $x^2 - 9 = 0$
03. $x^2 - 16 = 0$
04. $x^2 - 25 = 0$
05. $x^2 - 36 = 0$
06. $x^2 - 49 = 0$
07. $x^2 - 64 = 0$
08. $x^2 - 81 = 0$
09. $x^2 - 100 = 0$
10. $x^2 - 121 = 0$
11. $x^2 - 144 = 0$
12. $x^2 - 169 = 0$
13. $x^2 - 196 = 0$
14. $x^2 - 225 = 0$
15. $x^2 - 256 = 0$
16. $x^2 - 289 = 0$
17. $x^2 - 324 = 0$

18. $x^2 - 361 = 0$
19. $x^2 - 400 = 0$
20. $x^2 - 441 = 0$

3. Trinomio cuadrado perfecto

Identifica $A^2 \pm 2AB + B^2 = (A \pm B)^2$. La raíz obtenida es doble.

• Comprueba que el primer y tercer término sean cuadrados.

• Verifica que el término central sea el doble producto de sus raíces.

• Escribe el binomio al cuadrado y resuelve.

Ejemplo resuelto

$x^2 + 10x + 25 = 0$

$(x + 5)^2 = 0$

Solución doble: $x = -5$.

20 ejercicios: factoriza y resuelve

01. $9x^2 + 12x + 4 = 0$
02. $9x^2 - 54x + 81 = 0$
03. $x^2 - 6x + 9 = 0$
04. $x^2 + 18x + 81 = 0$
05. $4x^2 + 12x + 9 = 0$
06. $x^2 + 4x + 4 = 0$
07. $x^2 - 16x + 64 = 0$
08. $4x^2 + 32x + 64 = 0$
09. $x^2 - 10x + 25 = 0$
10. $9x^2 - 42x + 49 = 0$
11. $x^2 + 16x + 64 = 0$
12. $4x^2 + 32x + 64 = 0$
13. $4x^2 + 8x + 4 = 0$
14. $4x^2 + 24x + 36 = 0$
15. $9x^2 + 24x + 16 = 0$
16. $9x^2 + 54x + 81 = 0$
17. $9x^2 + 54x + 81 = 0$
18. $x^2 + 14x + 49 = 0$
19. $x^2 + 16x + 64 = 0$
20. $4x^2 + 12x + 9 = 0$

4. Trinomio $x^2 + bx + c$

Se buscan dos números cuya suma sea b y cuyo producto sea c.

• Ordena los términos de mayor a menor grado.

• Encuentra m y n tales que m + n = b y mn = c.

• Escribe (x + m)(x + n) = 0.

Ejemplo resuelto

$x^2 - 7x + 12 = 0$

$-3 + (-4) = -7$ y $(-3)(-4) = 12$

$(x - 3)(x - 4) = 0$; $x = 3$ o $x = 4$.

Video de apoyo: https://www.youtube.com/watch?v=cxFZTCISo_4

20 ejercicios: factoriza y resuelve

01. $x^2 + 17x + 72 = 0$
02. $x^2 - 8x + 16 = 0$
03. $x^2 + 6x - 7 = 0$
04. $x^2 + x - 2 = 0$
05. $x^2 - 25 = 0$
06. $x^2 - 17x + 72 = 0$
07. $x^2 - 11x + 18 = 0$
08. $x^2 + 2x - 48 = 0$
09. $x^2 - 3x = 0$
10. $x^2 - 3x - 54 = 0$
11. $x^2 - 8x = 0$
12. $x^2 - 8x = 0$
13. $x^2 - 7x = 0$
14. $x^2 + 10x + 9 = 0$
15. $x^2 - 4x + 3 = 0$
16. $x^2 - 3x - 4 = 0$
17. $x^2 - 11x + 18 = 0$
18. $x^2 - 3x - 54 = 0$
19. $x^2 - 11x + 30 = 0$
20. $x^2 + 8x + 7 = 0$

5. Trinomio $ax^2 + bx + c$ ($a \neq 1$)

Se utiliza la descomposición del término central o el método producto-suma.

• Multiplica a·c y busca dos enteros cuyo producto sea a·c y suma b.

• Divide el término bx en dos términos usando esos números.

• Agrupa y extrae factores comunes hasta obtener dos binomios.

Ejemplo resuelto

$6x^2 + 11x + 3 = 0$

$a \cdot c = 18$; buscamos 9 y 2 porque $9 + 2 = 11$.

$6x^2 + 9x + 2x + 3 = 0$

$3x(2x + 3) + (2x + 3) = 0$

$(3x + 1)(2x + 3) = 0$; $x = -1/3$ o $x = -3/2$.

20 ejercicios: factoriza y resuelve

01. $20x^2 - 10x - 10 = 0$
02. $3x^2 - 16x - 12 = 0$
03. $10x^2 + 5x - 15 = 0$
04. $6x^2 - 29x + 35 = 0$
05. $10x^2 + 10x - 20 = 0$
06. $2x^2 - 11x + 14 = 0$
07. $5x^2 - 12x - 9 = 0$
08. $12x^2 + 43x + 35 = 0$
09. $6x^2 - 12x + 6 = 0$
10. $12x^2 + 6x - 18 = 0$
11. $2x^2 - 18 = 0$
12. $15x^2 + 25x + 10 = 0$
13. $6x^2 + 26x + 24 = 0$
14. $9x^2 - 12x + 3 = 0$
15. $12x^2 - 20x + 8 = 0$
16. $5x^2 + 32x - 21 = 0$
17. $12x^2 + 12x - 24 = 0$
18. $15x^2 - 13x - 6 = 0$
19. $16x^2 + 48x + 35 = 0$
20. $16x^2 + 8x + 1 = 0$

6. Factorización por agrupación

Se agrupan cuatro términos para obtener un binomio común. Es especialmente útil después de descomponer el término lineal.

• Separa el término lineal en dos partes convenientes.

• Agrupa de dos en dos y extrae factor común en cada grupo.

• Extrae el binomio compartido y resuelve.

Ejemplo resuelto

$2x^2 + 6x + 3x + 9 = 0$

$2x(x + 3) + 3(x + 3) = 0$

$(2x + 3)(x + 3) = 0$; $x = -3/2$ o $x = -3$.

20 ejercicios: factoriza y resuelve

01. $5x^2 + 7x - 6 = 0$
02. $2x^2 - x - 10 = 0$
03. $5x^2 - 19x - 30 = 0$
04. $2x^2 - 14x + 20 = 0$
05. $3x^2 + 6x - 24 = 0$
06. $2x^2 - 13x + 20 = 0$
07. $3x^2 - 14x + 15 = 0$
08. $2x^2 + 6x - 20 = 0$
09. $4x^2 + 16x - 20 = 0$
10. $2x^2 - 2x - 24 = 0$
11. $5x^2 + 13x - 28 = 0$
12. $5x^2 + 6x - 8 = 0$
13. $3x^2 + 11x - 20 = 0$
14. $5x^2 + 16x + 12 = 0$
15. $2x^2 + 2x - 12 = 0$
16. $3x^2 - 6x - 24 = 0$
17. $3x^2 + x - 10 = 0$
18. $3x^2 + 14x + 15 = 0$
19. $5x^2 + 18x + 9 = 0$
20. $5x^2 - 36x + 36 = 0$

7. Fórmula general

Para $ax^2 + bx + c = 0$, con $a \neq 0$, se usa: $x = (-b \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)}) / (2a)$. Es útil incluso cuando la factorización no resulta evidente.

Procedimiento: 1) ordena e iguala a cero; 2) identifica a, b y c con sus signos; 3) calcula $\Delta = b^2 - 4ac$; 4) sustituye y simplifica; 5) verifica.

Si $\Delta > 0$: dos soluciones reales distintas. Si $\Delta = 0$: una solución real doble. Si $\Delta < 0$: ninguna solución real (sí hay soluciones complejas).

Ejemplo resuelto

$2x^2 - 5x - 3 = 0 \rightarrow a = 2, b = -5, c = -3$.

$\Delta = (-5)^2 - 4(2)(-3) = 25 + 24 = 49$.

$x = (5 \pm \sqrt{49})/4 = (5 \pm 7)/4$.

$x_1 = 3$; $x_2 = -1/2$. Ambas satisfacen la ecuación.

Video complementario para trinomios: https://www.youtube.com/watch?v=UNEfUX8oNsE

Video de búsqueda sobre fórmula general (seleccionar explicación paso a paso): https://www.youtube.com/results?search_query=Daniel+Carreon+formula+general+ecuaciones+cuadraticas

Más recursos por método: https://www.youtube.com/results?search_query=matematicas+profe+alex+factorizacion+factor+comun+diferencia+cuadrados+trinomio+cuadrado+perfecto

20 ejercicios: resuelve con fórmula general

01. $2x^2 - 50 = 0$
02. $3x^2 - 12x - 36 = 0$
03. $3x^2 - 12x - 36 = 0$
04. $5x^2 - 45 = 0$
05. $2x^2 - 2x - 24 = 0$
06. $3x^2 + 9x - 84 = 0$
07. $3x^2 + 30x + 63 = 0$
08. $3x^2 - 27x + 42 = 0$
09. $x^2 + 2x + 1 = 0$
10. $5x^2 = 0$
11. $2x^2 - 4x + 2 = 0$
12. $x^2 - 6x + 9 = 0$
13. $5x^2 + 70x + 245 = 0$
14. $3x^2 - 42x + 147 = 0$
15. $2x^2 - 12x + 20 = 0$
16. $4x^2 - 32x + 96 = 0$
17. $4x^2 - 32x + 68 = 0$
18. $5x^2 + 30x + 85 = 0$
19. $4x^2 + 16x + 24 = 0$
20. $4x^2 + 4 = 0$